Problemas resueltos de mecánica para ingenieros: Cinemática

Arantza Martínez Pérez y Jorge Aísa Arenaz

PRENSAS DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

PROBLEMAS RESUELTOS DE MECÁNICA PARA INGENIEROS: CINEMÁTICA

PROBLEMAS RESUELTOS DE MECÁNICA PARA INGENIEROS: CINEMÁTICA

Arantza Martínez Pérez y Jorge Aísa Arenaz

PRENSAS DE LA UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

1.ª edición, 2020

Colección de Textos Docentes, n.º 297

Prensas de la Universidad de Zaragoza. Edificio de Ciencias Geológicas, c/ Pedro Cerbuna, 12, 50009 Zaragoza, España. Tel.: 976 761 330. Fax: 976 761 063
puz@unizar.es http://puz.unizar.es

Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional.

ISBN 978-84-1340-174-4
Impreso en España
Imprime: Servicio de Publicaciones. Universidad de Zaragoza
D.L.: Z 1226-2020

Agradecimientos

Primavera de 2020. Un virus, el COVID-19 se extiende por todo el mundo. Como resultado, medio planeta está confinado en su casa... y en estos días de pasar horas aislado, va naciendo este libro de problemas de Mecánica.

Va dedicado a todos aquellos que sufrieron las consecuencias del virus. A víctimas, sanitarios, cuerpos de seguridad, bomberos... y a todos aquellos que nos ayudaron a salir de esta.

... También a todos los profesores y alumnos que, haciendo un gran esfuerzo, consiguieron sacar el curso 19-20 adelante.

Gracias

Prólogo

El autor Victoriano López Rodríguez en el prólogo de su libro *Problemas resueltos de electromagnetismo*, hace referencia a un proverbio de Confucio que decía:

> Olvido lo que oigo, recuerdo lo que veo y aprendo lo que hago.

Es por lo que esta colección de dos libros de Mecánica se ha escrito con la idea de que el estudiante *aprenda* Mecánica *haciendo* problemas.

Como se irá viendo según se vaya avanzando a largo de ambos libros, estos no pretenden ser textos básicos en los que se explique la Mecánica con la profundidad y rigurosidad de los libros teóricos, sino que solo se darán una serie de pinceladas sobre los conceptos básicos de cinemática (tomo I: *Problemas resueltos de Mecánica para ingenieros: Cinemática*) y dinámica (tomo II: *Problemas resueltos de Mecánica para ingenieros: Dinámica*). Estos conceptos irán distribuidos en capítulos, de tal manera que cada uno de ellos acabará con un problema resuelto, ejemplo muy sencillo en el que se pongan en práctica dichos conceptos, y las expresiones y notación indicadas.

En este primer tomo, se trata la Cinemática 3D y 2D, y tras los capítulos teóricos se tienen una serie de problemas, también resueltos, en los que se detalla cada uno de los pasos que se deben dan para completar los cálculos, y en los que se irán introduciendo conceptos nuevos, y se irá haciendo hincapié en otros ya vistos.

La mayoría de los problemas presentados en este libro han sido planteados en exámenes del grado en Ingeniería Electrónica y Automática de la EINA de Zaragoza, por lo que se consideran de un nivel adecuado para *comenzar* a preparar la asignatura de Mecánica de otras titulaciones de Ingeniería.

1. Cinemática de la partícula

1.1. Introducción

La mecánica estudia y modela el movimiento de los diferentes sistemas mecánicos relacionándolo con sus causas y tratando de establecer su comportamiento futuro.

La mecánica se subdivide, atendiendo a los sistemas objeto de estudio, según el siguiente esquema

- Mecánica
  - Clásica
    - Solido rígido → Máquinas y mecanismos
    - Medios continuos
      - Sólidos deformables
      - Fluidos
  - Relativista
  - Cuántica

En este libro de Mecánica se presentan las bases de la Mecánica Clásica aplicada principalmente a sistemas mecánicos compuestos por sólidos rígidos y se estructura en dos bloques:

– Cinemática («kinematics»): descripción del movimiento

– Dinámica («kinetics»): relación entre el movimiento y las acciones que lo causan (fuerzas, momentos)

El análisis dinámico presenta dos grandes enfoques:

– Vectorial: se explica la evolución de los sistemas mecánicos a partir de magnitudes vectoriales como fuerza y momento, aplicando los llamados *teoremas vectoriales* (Teorema de la Cantidad de Movimiento y Teorema del Momento Cinético)

– Analítica: en este caso se trata de explicar la evolución del sistema a partir de magnitudes escalares como energía y trabajo. Existen diferentes planteamientos, como el Teorema de la Energía, el Principio de los Trabajos Virtuales, Ecuaciones de Lagrange, etc.

1.2. Referencia. Tipos y cómo se definen

En este texto, como es habitual en los cursos de Mecánica, se comenzará por el análisis del movimiento de la partícula P, para pasar después al sólido y sistemas multisólido. Cuando se introduzcan los principios de la dinámica se hará algo semejante, comenzando por la dinámica de la partícula, pasando luego al trabajo con sólidos rígidos.

La cinemática de la partícula P, estudio del movimiento de esa partícula independientemente de las causas que lo producen.

Para poder describir el movimiento de P, será necesario definir previamente desde dónde se observa este movimiento, puesto que esto condiciona la apreciación del mismo. El lugar desde donde se observa el movimiento recibe el nombre de *referencia* de estudio, o simplemente, referencia.

Las referencias pueden ser:

Fija: Se observa el movimiento desde un lugar que no se mueve, es decir, que está fijo. En este libro de Mecánica orientado a grados de Ingeniería de la Rama Industrial, se considera la Tierra como una referencia fija, despreciando el efecto de su movimiento por el espacio sobre máquinas o vehículos terrestres.

En este caso se está observando movimiento *absoluto:*

«Me encuentro en la acera, y observo como circula un autobús».

Móvil: Se observa el movimiento desde un lugar de observación que se mueve, es decir, que tiene velocidad. Ejemplos de este tipo de referencia son un autobús, una plataforma que gira, etc.

En este caso se está observando movimiento *relativo:*

«Voy montado en un autobús y veo un peatón esperando en un semáforo. Aunque el peatón está quieto, yo aprecio que se está moviendo»

Existen distintos tipos de referencias relativas o móviles, y estas son la traslacional, la rotacional y la roto-traslacional

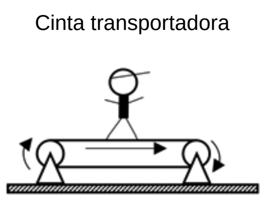


FIGURA 1.1. Referencia traslacional es aquella que solo tiene movimiento de traslación

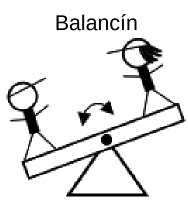


FIGURA 1.2. Referencia rotacional es aquella que solo tiene movimiento de rotación

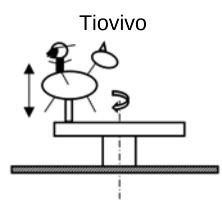


FIGURA 1.3. Referencia roto-traslacional es aquella que combina rotación y traslación simultáneas

En relación con el movimiento de un objeto o partícula:

Dos personas que están en distintas referencias, detectan diferente movimiento de una misma partícula.

Dos personas que están en la misma referencia, aunque estén en distintos puntos de la referencia, observan idéntico movimiento de la partícula (por ejemplo, dos personas dentro de un autobús, una sentada al fondo, y otra de pie al principio, ven el mismo movimiento de un tercer viajero que camina dentro del autobús buscando un asiento).

Una referencia se define siempre de forma o matemáticamente con un punto (lugar de observación) y tres direcciones ortogonales dos a dos que podrán ser fijas (para la referencia absoluta) o móviles (en las referencias relativas). Más adelante se señalará la diferencia entre referencia y base de proyección con mayor claridad.

Para unificar notación, cuando la referencia es fija, el punto que la define siempre será «O», mientras que, para referencia móvil, el punto que la define será uno distinto de «O». Se reserva el uso de las mayúsculas para denotar a los puntos.

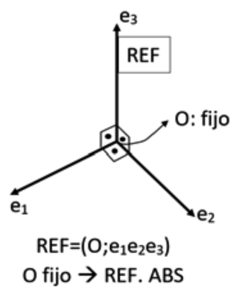


FIGURA 1.4. Referencia fija

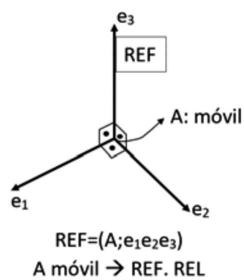


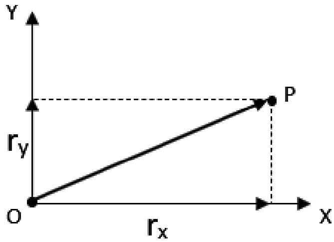
FIGURA 1.5. Referencia absoluta

1.3. El vector posición

Una vez presentado el concepto de *referencia* y cómo se define, ya se puede platear la cinemática del punto:

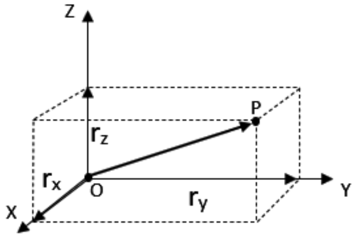
El movimiento de P queda definido como el cambio de posición de P en función del tiempo.

Se define el *vector de posición* como el que une un punto fijo en la referencia (origen del vector de posición) con el punto P objeto de estudio (P es siempre el extremo del vector de posición).



$$\overline{OP} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}$$

FIGURA 1.6. Vector 2D



$$\overline{OP} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

FIGURA 1.7. Vector 3D

En este texto, siempre se expresarán los vectores en forma de columna.

1.4. Derivada del vector de posición: vectores velocidad y aceleración

Una vez fijada la posición de un punto, se calcula el vector velocidad derivando el vector posición

$$\bar{v}_{REF}(P) = \frac{d}{dt}[\overline{OP}]_{REF}$$

Una vez calculada la velocidad de un punto, se calcula el vector aceleración derivando el vector velocidad

$$\bar{\gamma}_{REF}(P) = \frac{d}{dt}[\bar{v}_{REF}(P)]_{REF}$$

Para un ejemplo 2D, el extremo de la saeta de un reloj, se tendría:

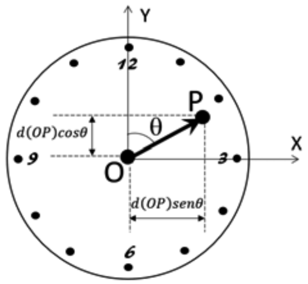


FIGURA 1.8. Vector posición de P

– Se fija la referencia de estudio *absoluta*: (O; XY).
– Se traza el vector de posición $\overline{OP}$, cuyo módulo se denominará $d(OP)$.
– Se proyecta el vector sobre los ejes XY.

$$[\overline{OP}]_{XY} = \begin{bmatrix} d(OP)\ sen\ \theta \\ d(OP)\ cos\ \theta \end{bmatrix}_{XY}$$

– Se identifican los parámetros variables: solo θ, ya que la distancia $d(OP)$ es constante

– Para el caso de movimiento absoluto expresado en unos ejes fijos $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$, puede afirmarse, como el lector conoce de cursos precedentes, que la derivada se corresponderá con las derivadas de sus componentes.

$$\left\{\left[\frac{d}{dt}\bar{r}\right]_{REF\_ABS}\right\}_{XYZ} = \frac{d}{dt}\{[\bar{r}]_{REF\_ABS}\}_{XYZ} = \begin{bmatrix} {dr_x}/{dt} \\ {dr_y}/{dt} \\ {dr_z}/{dt} \end{bmatrix}_{XYZ}$$

Por tanto, para el ejemplo del reloj, la velocidad del extremo de la saeta será:

$$[\bar{v}_{abs}(P)]_{XY} = \begin{bmatrix} d(OP)\ \dot{\theta} cos\ \theta \\ -d(OP)\ \dot{\theta} sen\ \theta \end{bmatrix}_{XY}$$

Obsérvese que la derivada del ángulo (en este caso parámetros variable con el tiempo) se expresa con un punto superior, que será la notación a seguir a partir de este momento.

Y de la misma manera, para calcular la aceleración, se derivaría de nuevo el vector velocidad. Como se sigue derivando en unos ejes fijos, bastaría derivar las componentes del vector velocidad. En este caso, el único parámetro que sigue siendo variable es θ, ya que $\dot{\theta}$ es constante (la saeta del reloj gira a velocidad angular constante) y por tanto $\ddot{\theta} = 0$

$$[\bar{\gamma}_{abs}(P)]_{XY} = \begin{bmatrix} d(OP)\,\ddot{\theta}cos\,\theta - d(OP)\,\dot{\theta}^2 sen\,\theta \\ -d(OP)\,\ddot{\theta}sen\,\theta - d(OP)\,\dot{\theta}^2 cos\,\theta \end{bmatrix}_{XY} = \begin{bmatrix} -d(OP)\,\dot{\theta}^2 sen\,\theta \\ -d(OP)\,\dot{\theta}^2 cos\,\theta \end{bmatrix}_{XY}$$

La manera de trabajar en 3D sería idéntica, pero utilizando vectores de tres componentes. Se verá un ejemplo 3D resuelto al final de este capítulo 1.

1.5. Interpretación geométrica de los resultados. Coherencia en las unidades

Se van a interpretar ahora los vectores velocidad y aceleración obtenidos en el apartado anterior.

Si se dibujara gráficamente el vector velocidad del extremo de la saeta se tendría lo mostrado en la figura 1.9. Este vector no deja de tener, en módulo, el valor visto en Física General de ωr. A este módulo del vector velocidad se le denomina celeridad, y en la nueva notación, $\omega = \dot{\theta}$ y r sería la distancia OP. Su dirección es tangente a la circunferencia que describe el extremo de la saeta.

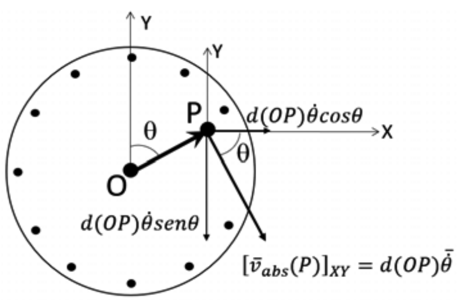


FIGURA 1.9. Vector velocidad de P

Si se descompusiera el vector velocidad en sus componentes en X e Y, bastaría proyectar usando la trigonometría, y resultando que la componente en X tiene signo positivo y va multiplicada por el coseno, y la componente en Y, tendría signo negativo e iría multiplicada por el seno. Esto es precisamente lo que indica el vector obtenido al derivar:

$$[\bar{v}_{abs}(P)]_{XY} = \begin{bmatrix} d(OP)\,\dot{\theta}cos\,\theta \\ -d(OP)\,\dot{\theta}sen\,\theta \end{bmatrix}_{XY}$$

En cuanto a las unidades, se tiene una expresión en la que se multiplica una distancia (m en el SI) por una velocidad angular (s^{-1} en SI), lo que da lugar a unidades de velocidad m/s.

Se va a realizar a continuación el mismo análisis, pero para la aceleración.

En el caso de un punto que describe trayectorias circulares a una velocidad angular constante, aparece únicamente, y tal y como se ve en Física General, la aceleración normal, que va dirigida hacia el centro de esa trayectoria circular.

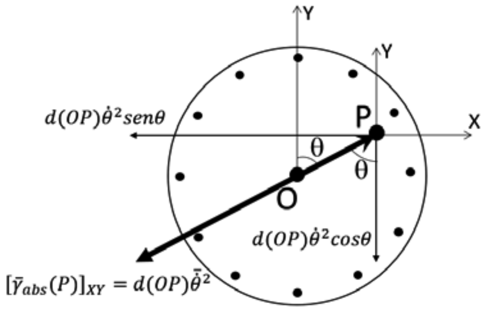


FIGURA 1.10. Vector aceleración de P

Esta aceleración normal, se suele expresar como $\omega^2 r$. Con la nueva notación, la aceleración normal quedaría $d(OP)\,\dot{\theta}^2$ Si ahora se proyecta sobre los ejes XY utilizando trigonometría, se tendría signo negativo en las dos componentes, apareciendo el seno en la componente X y el coseno en la componente Y. Precisamente, lo que se ha obtenido al derivar el vector velocidad.

$$[\bar{\gamma}_{abs}(P)]_{XY} = \begin{bmatrix} -d(OP)\dot{\theta}^2 sen\,\theta \\ -d(OP)\dot{\theta}^2 \cos\theta \end{bmatrix}_{XY}$$

En cuanto a las unidades, se tiene una expresión en la que se multiplica una distancia (m en el SI) por una velocidad angular al cuadrado (s^{-2} en SI), lo que da lugar a unidades de aceleración m/s^2.

Supóngase ahora que la saeta se fuera acelerando poco a poco, y que, por tanto, su velocidad angular no fuera constante. En este caso, $\ddot{\theta} \neq 0$. Ahora no solo se tendría la componente normal de la aceleración, sino también la tangencial, ambas conocidas como componentes intrínsecas de la aceleración. Se muestra en la siguiente figura representada únicamente dicha aceleración tangencial.

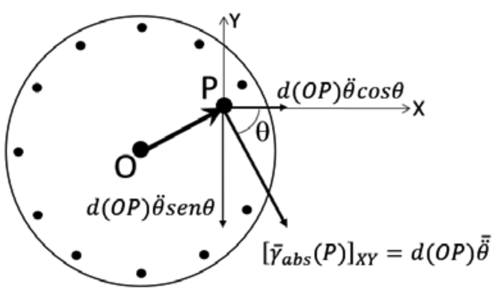


FIGURA 1.11. Componentes intrínsecas de la aceleración de P

Si se descompusiera el vector aceleración tangencial en sus componentes en X e Y, se volvería a proyectar usando trigonometría, y resultando que la componente en X tiene signo positivo y va multiplicada por el coseno, y la componente en Y, tendría signo negativo e iría multiplicada por el seno (al igual que la velocidad tangencial). Si se retoma el resultado del vector aceleración antes de haber anulado los términos que contenían $\ddot{\theta}$, se tiene:

$$[\bar{\gamma}_{abs}(P)]_{XY} = \begin{bmatrix} d(OP)\,\ddot{\theta} cos\,\theta - d(OP)\,\dot{\theta}^2 sen\,\theta \\ -d(OP)\,\ddot{\theta} sen\,\theta - d(OP)\,\dot{\theta}^2 cos\,\theta \end{bmatrix}_{XY}$$

En cuanto a las unidades, se tiene una expresión en la que se multiplica una distancia (m en el SI) por una aceleración angular (s^{-2} en SI), lo que da lugar a unidades de velocidad m/s^2.

1.6. Problema ejemplo

Se observa el movimiento de una atracción de feria en la que su brazo gira en el plano con velocidad angular constante $\dot{\theta}$. Sobre el brazo desplaza una cabina, de tal manera que la distancia s es variable. A su vez, la cabina gira con velocidad angular no constante $\dot{\varphi}$. En la figura se muestran los datos geométricos para poder resolver el problema, así como una vista auxiliar. Se pide calcular la velocidad absoluta y plantear el cálculo de la aceleración absoluta de un punto P de la periferia de la cabina. Entiéndase P, como el punto de acceso a la cabina, por ejemplo.

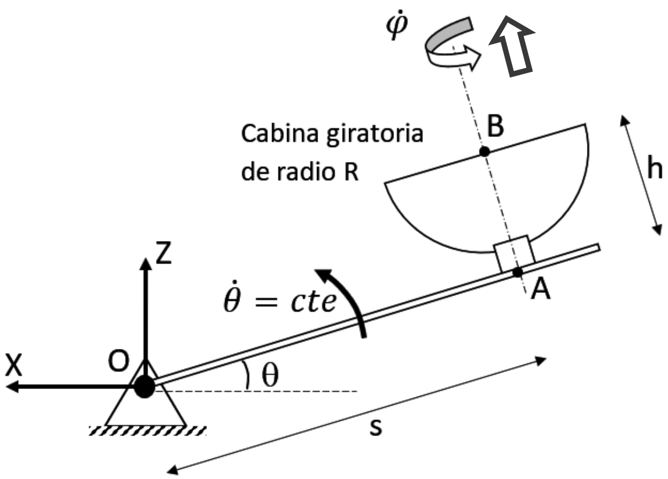


FIGURA 1.12. Vista de perfil del sistema

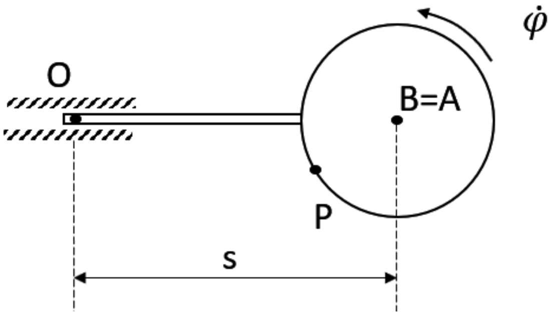


FIGURA 1.13. Vista desde arriba según la dirección del eje de revolución de la cabina

En primer lugar, es necesario definir el vector $\overline{OP}$ y proyectarlo sobre $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$:

$$\overline{OP} = \bar{s} + \bar{h} + \bar{R}$$

Dado que ahora se está trabajando ya en 3D, y la proyección de los vectores se complica, utilizaremos sistemas coordenados auxiliares que ayuden a llegar a la proyección final sobre $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$. Se denominarán como $\bar{1}\bar{2}\bar{3}$, $\bar{1}'\bar{2}'\bar{3}'$.

NOTA: los sistemas coordenados siempre se deben dibujar en sentido dextrógiro (el producto vectorial de $\bar{1}x\bar{2}$, da como resultado el vector $\bar{3}$. En este texto, se denotará con «x» todos los productos vectoriales).

Se muestran las imágenes en las que se han añadido los sistemas coordenados auxiliares:

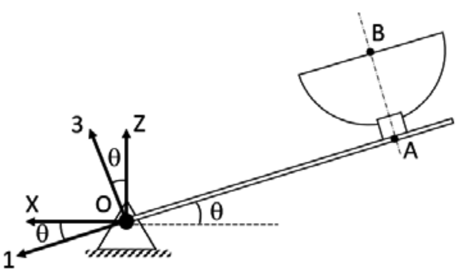


FIGURA 1.14. Representación de los ejes 123

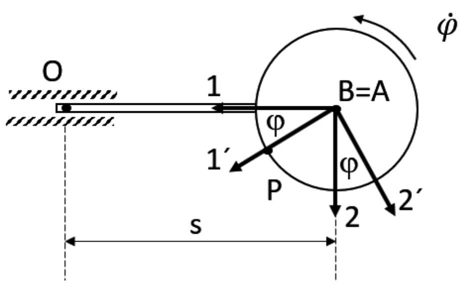


FIGURA 1.15. Representación de los ejes 123

$$\{\bar{s}\}_{123} = \begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{123} = \begin{bmatrix} -scos\theta \\ 0 \\ ssen\theta \end{bmatrix}_{XYZ}$$

$$\{\bar{H}\}_{123} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}_{123} = \begin{bmatrix} hsen\theta \\ 0 \\ hcos\theta \end{bmatrix}_{XYZ}$$

$$\{\bar{R}\}_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{1'2'3'} = \begin{bmatrix} Rcos\varphi \\ Rsen\varphi \\ 0 \end{bmatrix}_{123} = \begin{bmatrix} Rcos\varphi cos\theta \\ Rsen\varphi \\ -Rcos\varphi sen\theta \end{bmatrix}_{XYZ}$$

Obsérvese que para el vector $\bar{R}$ es necesario proyectar dos veces. R está sobre el eje 1´. En una primera proyección, las componentes pasan a los ejes 1 y 2. La componente que queda sobre 2, no es necesario volver a proyectarla, porque el eje Y coincide sobre el eje 2. Sin embargo, la componente que queda sobre el eje 1, se debe proyectar sobre X y Z.

El lector debe comprender que el vector R es siempre el mismo, pero cambia de forma al expresarse en diferentes bases y, por tanto, sus componentes son diferentes, no así el vector. Esta observación es fundamental para el trabajo práctico subsiguiente.

Por tanto, el vector posición $\overline{OP}$ sobre $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ quedará:

$$\{\overline{OP}\}_{XYZ} = \begin{bmatrix} -scos\theta + hsen\theta + Rcos\varphi cos\theta \\ Rsen\varphi \\ ssen\theta + hcos\theta - Rcos\varphi sen\theta \end{bmatrix}_{XYZ}$$

Para calcular la velocidad de P, y dado que se ha proyectado sobre unos ejes fijos, bastará derivar cada una de las componentes del vector. En este caso:

Valores constantes: h, R.

Parámetros variables: s, θ, φ.

$$\{\bar{v}_{abs}(P)\}_{XYZ} = \begin{bmatrix} -\dot{s}cos\theta + s\dot{\theta}sen\theta + h\dot{\theta}cos\theta + R(-\dot{\varphi}sen\varphi cos\theta - \dot{\theta}cos\varphi sen\theta) \\ R\dot{\varphi}cos\varphi \\ \dot{s}sen\theta + s\dot{\theta}cos\theta - h\dot{\theta}sen\theta - R(-\dot{\varphi}sen\varphi sen\theta + \dot{\theta}cos\varphi cos\theta) \end{bmatrix}_{XYZ}$$

Para calcular la aceleración de P, y dado que se ha proyectado sobre unos ejes fijos, bastará derivar una vez más, cada una de las componentes del vector. En este caso:

Valores constantes: H, R, $\dot{\theta}$ por lo que $\ddot{\theta} = 0$.

Parámetros variables: s, θ, φ, $\dot{s}$, $\dot{\varphi}$, por lo que tanto $\ddot{s}$, como $\ddot{\varphi}$ serán distintos de cero.

$$\{\bar{\gamma}_{abs}(P)\}_{XYZ} = \begin{bmatrix} {}^{d}/_{dt}\,(\dot{s}cos\theta - s\dot{\theta}sen\theta + H\dot{\theta}cos\theta + R(-\dot{\varphi}sen\varphi cos\theta - \dot{\theta}cos\varphi sen\theta)) \\ {}^{d}/_{dt}\,(R\dot{\varphi}cos\varphi) \\ {}^{d}/_{dt}\,(-\dot{s}sen\theta + s\dot{\theta}cos\theta - H\dot{\theta}sen\theta - R(-\dot{\varphi}sen\varphi sen\theta + \dot{\theta}cos\varphi cos\theta)) \end{bmatrix}_{XYZ}$$

Se sugiere, para completar el trabajo de este problema, calcular la velocidad y aceleración de otros puntos del sistema mecánico diferentes a P.

ISBN 978-84-1340-174-4
9 788413 401744

TECNOLÓGICAS

colección
textos docentes

1542
Prensas de la Universidad
Universidad Zaragoza